Μάθημα 13ο: 14/05/2020

Θα πούμε τα SOS.

Ορισμοί όχι SOS. Πρόταση 4.2.1: SOS

Δυναμοσειρές και ολομορφία:

γεωμετρική σειρά $\Rightarrow$ Πρόταση 4.2.1 (χωρίς απόδειξη του Λήμματος 4.2.2)

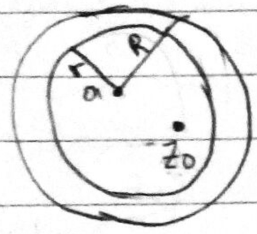
SOS

+ Παρατήρηση 4.2.3 $\Rightarrow$ {Θεώρημα 4.2.2 + Πόρισμα 4.2.1}

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2
(κάποια σημεία, βλ. Απόδειξη στις Σημειώσεις).

Αρκεί ν.δ.ό. $\forall z_0 \in D(a,R)$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} \quad (\exists \in \mathbb{R})$$



$z_0 \in D(a,R)$, $R \in [0,+\infty]$

$\Rightarrow \exists\, r \in (\underbrace{|z_0-a|}_{<R}, R)$

$\Rightarrow z_0 \in D(a,r) \Leftrightarrow |z_0-a|<r$

και $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot n \cdot r^{n-1} < +\infty}$ $*$

Γιατί ισχύει όμως η $(*)$???

$\forall\, \tilde{z} \in \partial D(a,r)$ η $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (\tilde{z}-a)^{n-1}$

συγκλίνει απόλυτα (από ορισμό ακτίνα σύγκλισης και Παρατήρηση 4.2.3) αφού η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\tilde{z}-a)^n$: συγκλίνει απόλυτα

αφού $|\tilde{z}-a|=r<R \xRightarrow{\text{Παρ. 4.2.3}} \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|\,\underbrace{|\tilde{z}-a|}_{=r}^{n-1} < +\infty$

Έστω $\varepsilon>0$ έτσι ώστε : $D(z_0,\varepsilon)\subset D(a,r)$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad , z\in D(a,r)$

$$\Rightarrow \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^n-(z_0-a)^n}{z-z_0}$$

$\forall z\in D(z_0,\varepsilon), z\neq z_0$

($f(z)$ είναι όριο και $\exists$, $f(z_0)$ είναι όριο και $\exists$)

Επομένως $\exists$ και το $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

Θέτω $\frac{(z-a)^n-(z_0-a)^n}{z-z_0} = g_n(\underbrace{z-a}_{=w},\underbrace{z_0-a}_{=w_0})$

όπου $g(w,w_0) = \frac{w^n-w_0^n}{w-w_0} = \sum_{k=0}^{n-1} w^k \cdot w_0^{n-1-k}$ ΠΡΟΣΟΧΗ

με $|g_n(w,w_0)| \le n\cdot|r|^{n-1}$ για $|w|,|w_0|<r$

$\Rightarrow$ η σειρά $\sum_{n=1} \underbrace{c_n g_n(z-a,z_0-a)}_{=f_n(z)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{D}(a,r)$

αφού Κρ. Weierstrass : $\forall z\in \overline{D}(a,r)$: $|f_n(z)|\le |c_n|\,n\,|r|^{n-1}$

και $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, r^{n-1} < +\infty$: συγκλίνει ομοιόμορφα και οι όροι είναι συνεχείς συναρτήσεις
η σειρά θα είναι συνεχής συνάρτηση

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(z-a, z_0-a) \left[= \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right]$$ είναι

συνεχής συνάρτηση του z στο $\overline{D}(a,r)$ στο οποίο βρίσκονται και το z και το z_0

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(z-a, z_0-a) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{g_n(z_0-a, z_0-a)} \overset{*}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (z_0-a)^k (z_0-a)^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (z_0-a)^{n-1}$$

$$= n \cdot (z_0-a)^{n-1}$$

$$\overset{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n (z_0-a)^{n-1}$$

<u>Άρα:</u> $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (z_0-a)^{n-1} = f'(z_0)$

$\boxed{\text{Τέλος της απόδειξης.}}$

Άλλος τρόπος γραφής της $f'(z)$.

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n-1=0}^{\infty} ((n-1)+1) c_{(n-1)+1} (z-a)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1)\, c_{n+1}}_{= \frac{(n+1)!}{n!}} (z-a)^{n}$$

Αρα από Θ.4.2.2 : $\underbrace{\exists (f')'(z)}_{= f''(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\tilde{c}_n\, n}_{= \frac{(n+1)!}{n!} c_{n+1}} (z-a)^{n-1}$

$f = u + iv \Rightarrow f' = u_x + i v_x = \underbrace{v_y}_{=\tilde{u}} + i \underbrace{(-u_y)}_{=\tilde{v}}$

$\Rightarrow f'' = (f')' = \tilde{u}_x + i\tilde{v}_x \underset{C.R}{=} \tilde{v}_y + i(-\tilde{u}_y)$

$= v_{yx} + i(-u_{yx}) = -u_{yy} + i\boxed{(-v_{yy})}$

$= u_{xx} + i\boxed{v_{xx}} = v_{xy} + i(-u_{xy})$

$\Rightarrow \underbrace{u_{xx} + u_{yy} = 0}_{= \Delta u} \Leftrightarrow u$: αρμονική (επιλύει Εξ. Laplace), όπου $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$: Τελεστής Laplace

$\Rightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0 \Leftrightarrow v$: αρμονική (επιλύει Εξ. Lapla

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Πρόταση 4.3.1 (SOS)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Ονομάζω $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$

Είναι ολόμορφη σύμφωνα με Θ.4.2.2. Άρα

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}$$

Για κάθε $c \in \mathbb{C}$ σταθερό, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση.

$$f(z) = F(z)\,F(c-z), \quad z \in \mathbb{C}$$

$$f'(z) = F'(z)F(c-z) - F(z)\cdot F'(c-z)$$
$$f'(z) = F'(z)\,F(c-z) - F(z)f(c-z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Από Πρόταση 4.3.1 προκύπτει ότι η f είναι σταθερή, δηλ. $F(0)=1$

$$F(z)\,F(c-z) = f(z) = f(0) = F(0)\,F(c) = F(c).$$

Θέτω $c - z = w$ άρα:

$$F(z+w) = F(z)F(w), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Θέλω να δείξω ότι:

$$F(iz) = \cos z + i\sin z, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Εξ' ορισμού όμως:

$$F(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{i^n}_{=\cdots} \frac{z^n}{n!} \quad \text{με}$$

$$c_n = i^n = \begin{cases} i, & \text{αν } n = 4k+1 \\ -1, & \text{αν } n = 4k+2 \\ -i, & \text{αν } n = 4k+3 \\ 1, & \text{αν } n = 4k+4. \end{cases}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!} \quad \text{όπου} \quad c_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 4k \\ 0, & \text{αν } n = 4k+1 \\ -1, & \text{αν } n = 4k+2 \\ 0, & \text{αν } n = 4k+3 \end{cases}$$

Αυτό προκύπτει επειδή: $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{z^n}{n!}, \quad d_n = \begin{cases} 0, & n = 4k \\ 1, & n = 4k+1 \\ 0, & n = 4k+2 \\ -1, & n = 4k+3. \end{cases}$$

$$i \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} i \cdot d_n \frac{z^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \cos z + i \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(c_n + i d_n)}_{= i^n \ \forall n \in \mathbb{N}_0} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{Άρα}$$

$$\boxed{\cos z + i \sin z = F(iz)}$$

<u>Παρατήρηση 4.3.3</u>

Τύπος του Euler: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

- $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

- $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

- $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \cos z = 0\}$

- $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \sin z = 0\}$

- $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$

- $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$.